ÉQUILIBRE ET POSSIBILITÉ DE CRISES DANS LE MODÈLE DE REPRODUCTION ÉLARGIE DE MARX

Carlo Benetti[*], Alain Béraud[†], Edith Klimovsky[‡], Antoine Rebeyrol[◊]

Résumé : Dans les exemples numériques que Marx utilise pour étudier la reproduction du capital social, l'économie atteint, dès la seconde période, un régime de croissance régulière. Ce résultat a surpris les lecteurs de Marx qui l'ont interprété comme la propriété d'un modèle qui exclut toute crise. On montre ici qu'il n'en est rien. Nous avons identifié deux formes de crise dont l'occurrence dépend de la proportion entre les secteurs et du taux d'accumulation du secteur qui produit les moyens de production. Suivant une suggestion de Marx, nous accordons une attention particulière à l'analyse des conditions physiques de la reproduction, même si son schéma ne connaît que des quantités monétaires. Sur cette base, nous déterminons les proportions critiques au-delà desquelles une crise se produira. On montre que si, comme Marx l'admet, les marchandises s'échangent à leur valeur, les proportions critiques seront modifiées.

Abstract: In the numerical examples used by Marx to study the reproduction of social capital, the economy reaches a steady growth path in only two periods. This surprising outcome has been interpreted by Marx's readers as a property of a model which excludes any sort of economic crisis. This paper shows that this is not the case. Depending on the proportion between sectors and on the accumulation rate in the sector producing the means of production, two kinds of crises can occur. Following a suggestion of Marx, we emphasize the analysis of the physical conditions of reproduction and, on such a basis, we determine the critical proportions beyond which a crisis occurs. If, as in Marx, commodities are exchanged at their labor value, the critical proportions will be changed.

Mots-Clés : Marx, reproduction, crises.

Classification JEL : O41, B14, B51

[*] Université de Paris Ouest Nanterre La Défense, EconomiX.
[†] Université de Cergy-Pontoise, Thema.
[‡] Universidad Autónoma Metropolitana– Azcapotzalco, México, et EconomiX.
[◊] Université de Paris Ouest Nanterre La Défense, EconomiX.
Toute correspondance concernant cet article doit être adressée à Alain Béraud, Thema, Université de Cergy-Pontoise, 33 Boulevard du Port, 95011 Cergy-Pontoise Cedex, beraud@u-cergy.fr.

INTRODUCTION

À l'aide d'exemples numériques, Marx étudie la reproduction élargie du capital social dans une économie bisectorielle et montre que l'économie atteint un régime de croissance régulière dès la seconde période (Marx, 1885, Livre II, section III, chap. XIII). Nous appelons « équilibre de Marx » un tel résultat. S'opposant à d'autres propositions du *Capital*, cette conclusion a surpris la plupart des participants aux débats auxquels la théorie de Marx a donné lieu. Elle a été interprétée comme la propriété d'un modèle excluant la crise et l'instabilité dynamique lesquelles, par conséquent, ne pourraient apparaître qu'en modifiant certaines hypothèses retenues par Marx. Cette position largement partagée a été adoptée, entre autres, par des auteurs aussi différents et significatifs que Rosa Luxemburg (1913) et Michio Morishima (1973) que nous privilégions pour avoir affirmé leur position de manière particulièrement claire et vigoureuse. Leurs interprétations sont rappelées dans la section 1 après avoir présenté le modèle de Marx, explicité ses hypothèses et dégagé celles dont dépend de manière cruciale l'équilibre à la seconde période.

Un premier objectif de cet article est de critiquer ces interprétations, en faisant apparaître des possibilités de crises qui respectent les hypothèses de Marx. Dans les sections 2 et 3 nous dégagerons les conditions auxquelles la dynamique du schéma de Marx peut déboucher sur la croissance régulière à la seconde période, ou au contraire sur une crise. L'économie peut connaître des « crises d'ajustement » où le secteur qui produit les biens de consommation ne peut pas remplacer son capital et des « crises de reproduction » où une fraction des moyens de production qui ont été produits ne trouve pas d'emploi. L'étude des éventuels mécanismes de résorption de la crise n'est pas abordée ici et fera l'objet d'un article ultérieur.

Notre deuxième objectif est de compléter la théorie marxiste de la reproduction sur un point essentiel signalé par Marx. Dès le début de son analyse, il souligne la principale nouveauté du domaine qu'il va aborder : « Aussi longtemps que nous avons considéré la production de la valeur et la valeur des produits du capital sur le plan individuel, la forme naturelle du produit-marchandise était, pour l'analyse, tout à fait indifférente […] Ce mode de présentation purement formel ne suffit plus lorsqu'il s'agit d'étudier le capital social dans son ensemble et la valeur de ses produits […car...] *ce n'est pas seulement la valeur mais c'est encore la matière qui est remplacée* ; [ce qui] dépend donc tout autant des proportions relatives des composantes de la valeur du produit social que de leur valeur d'usage, de leur forme matérielle » (*ibid.*, t. 2, pp.753-4, souligné par nous). L'importance de la reproduction physique dans la reproduction sociale du capital est ainsi clairement affirmée, ce qui peut paraître paradoxal car son schéma décrit exclusivement une circulation monétaire, mais Marx ne développe pas cette analyse. À notre connaissance cette lacune n'a pas encore été comblée. En premier lieu nous expliquons comment les propriétés pertinentes des méthodes de production physiques sont déduites du schéma des flux en valeur ou monétaires. La section 2 montre que l'analyse des conditions physiques est la base théorique de l'étude de la croissance en ce qu'elle détermine les conditions générales de la reproduction et des crises. Enfin, la section 3 étudie les conditions de la reproduction en valeur dans l'hypothèse de valeur travail adoptée par Marx. Cet article se limite donc aux aspects physiques et en valeur de la reproduction en laissant de côté les questions relatives au « capital-argent », qui sont cependant importantes chez Marx.

Ajoutons deux remarques. Tout d'abord, la littérature secondaire sur les schémas de reproduction est particulièrement abondante. On peut renvoyer à l'ouvrage récent d'Andrew

Trigg (2006), qui en présente une habile synthèse. Mais à part les deux auteurs précités, nous n'y ferons que peu référence car les commentateurs de Marx ne se sont guère intéressés à la question centrale que l'on examine ici, celle de la reproduction physique. En second lieu, le schéma de Marx est un modèle bisectoriel linéaire qui peut donner lieu à des démonstrations géométriques simples. On suivra la tradition bien établie qui consiste à appuyer les commentaires économiques sur des démonstrations à la fois algébriques et géométriques.

1. Le modèle de Marx

Dans le prolongement de l'analyse de la reproduction simple, Marx propose une représentation bisectorielle agrégée de la production : « Les diverses branches de la production appartiennent à chacune des [deux] sections qui forment une seule grande branche de la production, dans un cas celle des moyens de production, dans l'autre celle des moyens de consommation » (Marx 1885, t. 2 : 755). Quant aux capitalistes, ils sont regroupés en deux classes : « La classe capitaliste de I englobe l'ensemble des capitalistes produisant des moyens de production » (*ibid.*, t. 2 : 758). Il en est de même pour les capitalistes produisant les biens de consommation. Cela implique que l'économie se compose de deux « marchandises composites » et de deux « capitalistes représentatifs ». Explicitons les hypothèses du modèle de Marx :

i. Dans chaque secteur, il existe une seule méthode de production, à produit unique et rendements constants.
ii. Les moyens de production (produits par le secteur I) ont comme seul usage l'accumulation, et les biens de consommation (produits par le secteur II) ont une double utilisation, à savoir l'accumulation (salaire des ouvriers) et la consommation des capitalistes.
iii. Tout le capital est circulant.
iv. Seuls les capitalistes épargnent, les travailleurs consomment tout leur salaire.
v. Le profit épargné est investi dans le secteur où il se forme.
vi. Le processus d'accumulation est asymétrique : le taux d'épargne du secteur I est fixé (il assure au moins la reproduction simple de ce secteur), tandis que le secteur II s'adapte en absorbant, s'il le peut, les moyens de production qui restent disponibles.

Dans ses exemples numériques, Marx admet que le prix relatif est fixé une fois pour toutes par les valeurs travail, le taux d'exploitation est uniforme et constant, la composition organique du secteur I est supérieure ou égale à celle du secteur II en sorte que le taux de profit du secteur I est inférieur ou égal à celui du secteur II.

1.1. Modèle bisectoriel, circulation et technique

Marx suppose que les taux de profit sont déterminés comme les rapports entre la plus-value et le capital de chaque secteur ce qui implique que les échanges se font à la valeur travail. On pourrait donc imaginer qu'il se donne les techniques de production des deux secteurs, en termes d'utilisation des moyens de production et du travail, en même temps que la valeur de la force de travail et le taux d'exploitation. Cependant, il n'en est rien. Marx énonce que ses schémas numériques décrivent la reproduction de flux monétaires : « les chiffres peuvent indiquer des millions de marks, de francs ou de livres sterling » (1885, t. 2 : 756). Seuls sont connus les produits des quantités par les valeurs unitaires : valeurs du produit brut, de la masse salariale et du capital constant dans les deux secteurs.

Posons la fameuse question de Sraffa : que pourrait observer un homme qui tomberait sur la terre depuis la lune[1] ? Sraffa (1960 : 3) répond : les quantités produites et utilisées. En opposition aux quantités de la théorie marginaliste (par exemple « l'utilité marginale »), les quantités "objectives" sont celles qui « have an objective, independent existence at every or some instants of the natural (i.e. not interfered with by the experimenter) process of production and distribution ; they can therefore be measured physically, with the ordinary instruments for measuring number, weight, time…These are the *only* quantities which … can be assumed to be known or given" (souligné par Sraffa). (cité par Kurz et Salvadori p. 1551-2). La réponse de Marx serait complètement différente : « l'homme de la lune selon Marx » observe lui aussi des quantités « objectives » mais ce sont des flux monétaires qui représentent les ventes totales des deux secteurs et les paiements des moyens de production et du travail pour la mise en œuvre de la reproduction élargie. On ne voit pas ce qui se passe dans les usines que Marx qualifie par ailleurs de « laboratoires secrets de la production » à la porte desquels il est écrit : « no admittance except on business » (1867 : 725). N'étant pas des businessmen, ni l'homme de la lune ni le macroéconomiste n'y ont accès.

Marx développe son analyse sur la base d'exemples numériques que nous reproduisons dans le § 3.3. Ses schémas peuvent être écrits sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} k_1 + v_1 + m_1 &= y_1 \\ k_2 + v_2 + m_2 &= y_2 \end{aligned} \tag{1}$$

où k_i, v_i, m_i, et y_i (i = 1, 2) sont, respectivement, le capital constant, le capital variable, la plus-value et la valeur du produit du secteur i. Supposons donc que « l'homme de la lune » observe les achats monétaires du secteur II au secteur I (k_2), les masses salariales des deux secteurs (v_1 et v_2) et les chiffres d'affaire des deux secteurs (y_1 et y_2). Ayant lu Marx ou inventé lui-même *Le Capital*, il en déduirait m_2 et le taux d'exploitation, puis (en supposant l'uniformité de ce taux), m_1 et k_1. Toutes les données du schéma de Marx lui seraient accessibles. Considérant qu'il existe une seule technique reprrésentée par une matrice de coefficients **A**, même si elle est inconnue, il pourrait *a priori* transcrire les équations précédentes sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \underbrace{q_1 a_{11}\lambda_1}_{k_1} + \underbrace{q_1 a_{12}\lambda_2}_{v_1} + m_1 &= \underbrace{q_1\lambda_1}_{y_1} \\ \underbrace{q_2 a_{21}\lambda_1}_{k_2} + \underbrace{q_2 a_{22}\lambda_2}_{v_2} + m_2 &= \underbrace{q_2\lambda_2}_{y_2} \end{aligned} \tag{2}$$

où q_i (i = 1, 2) représente les quantités (inconnues) de biens produits par les secteurs, λ_1 et λ_2 sont leurs valeurs travail unitaires (inconnues), et a_{ij} est la quantité de bien j nécessaire pour produire une unité de i (i.e. un des éléments de la matrice **A** inconnue).

En divisant la valeur des capitaux constant et variable de chaque secteur par la valeur de son produit brut et en notant λ la valeur relative λ_1/λ_2, il obtiendrait une matrice **M** :

[1] Kurz et Salvadori (2004 : 1546) nous disent que Sraffa rédigea à la fin des années 1920, probablement en 1928, un court document intitulé "Man from the Moon" dans lequel il cherchait à clarifier la signification des équations de production qu'il avait développées en 1927.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} k_1/y_1 & v_1/y_1 \\ k_2/y_2 & v_2/y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}/\lambda \\ a_{21}\lambda & a_{22} \end{pmatrix}$$

Les termes de cette matrice **M** sont quatre nombres purs *connus* par « l'homme de la lune selon Marx », même s'il ne connaît ni la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ni λ. Il peut toutefois en déduire immédiatement les termes diagonaux de **A** (les a_{ii}). En outre, il peut observer une propriété remarquable : la trace, le déterminant, l'équation caractéristique et donc aussi les valeurs propres de la matrice **M** sont *indépendants* de λ. Ce sont *les mêmes* que ceux de la matrice **A** inconnue. La plus-value étant positive, les matrices **M** et **A** sont productives.

La suite de l'article montrera que l'analyse de la reproduction chez Marx dépend d'une proportion que nous notons z et appelons la « proportion de Marx », qui peut être comprise comme un indice du poids relatif des secteurs. Par définition, on pose $z = y_1/k_2$, d'où l'on déduit :

$$z = y_1/k_2 = q_1/q_2a_{21} = q/a_{21}$$

où q désigne la proportion des quantités physiques produites dans les deux secteurs $(q = q_1/q_2)$. z est un nombre pur : il mesure le rapport *des valeurs ou des quantités* des capitaux constants qui ont été produits par le secteur I et utilisés par le secteur II. Comme il existe une seule technique, la proportion de Marx évoluera toujours comme la proportion entre les productions des deux secteurs dont elle est une fonction linéaire croissante. Ainsi, par exemple, la croissance régulière se définira-t-elle par la stationnarité de z.

Notons qu'il aurait été équivalent de capter l'idée de la proportion de Marx à travers le rapport des valeurs ou des quantités de biens de consommation utilisés productivement dans le secteur I et produits dans le secteur II : $v_1/y_2 = qa_{12}$, plutôt que $y_1/k_2 = q/a_{21}$. On peut définir une proportion $\tilde{z}$ de la façon suivante :

$$\tilde{z} = v_1/y_2 = q_1a_{12}/q_2 = qa_{12}$$

Sur la base de **M**, on passe de z à $\tilde{z}$ par la relation :

$$\tilde{z} = \; k_2/y_2 \quad v_1/y_1 \; z = (a_{21}\lambda)(a_{12}/\lambda)z = a_{21}a_{12}z$$

Comme $(a_{21}\lambda)$ et (a_{12}/λ) sont deux nombres connus, il est équivalent de raisonner sur le système (**M**, z) ou sur le système ($\mathbf{M}, \tilde{z}$).

Remarquons enfin que « l'homme de la lune selon Marx » aurait pu tout aussi bien diviser non pas les valeurs des capitaux constant et variable des différents secteurs par la valeur de leur produit brut y_i, mais les valeurs des capitaux constants et variables des différents secteurs par les valeurs, respectivement, des moyens de production et biens de consommation produits. Il aurait alors obtenu une matrice

$$\mathbf{Z}=\begin{pmatrix} k_1/y_1 & v_1/y_2 \\ k_2/y_1 & v_2/y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}q \\ a_{21}/q & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & \tilde{z} \\ 1/z & a_{22} \end{pmatrix},$$

indépendante de la valeur relative λ, où apparaissent z et $\tilde{z}$. Elle a la même équation caractéristique que la matrice **M**.

En résumé, un économiste post-sraffien qui accepte l'hypothèse de rendements d'échelles constants prendra pour base de son analyse dynamique le système physique (**A**, q). Marx, quant-à lui, se donne le système des flux monétaires (**M**, z). Il suppose qu'il lui correspond une unique matrice **A** et une unique proportion q mais ne se donne jamais les moyens de les calculer. La connaissance de (**M**, z**)** ne permet pas de déterminer la technique de production pas plus que le rapport d'échange ou la proportion entre les quantités produites. La technique appartient à un ensemble de matrices « **A** », qui sont associées aux différents niveaux possibles de λ, caractérisées par le fait qu'elles partagent toutes entre elles, et chacune avec **M** (et aussi avec **Z**), la même équation caractéristique[2]. Nous allons montrer dans la suite que la connaissance de cette équation caractéristique est suffisante pour déterminer les conditions *physiques* de la reproduction et des crises. Il est remarquable que ce résultat soit obtenu uniquement à partir de l'observation des flux monétaires (ou de valeurs)[3] sans avoir à entrer dans « les laboratoires secrets de la production ».

1.2. L'asymétrie des décisions d'accumulation et l'équilibre de Marx

Nous allons montrer que l'originalité de l'équilibre de Marx s'explique par l'asymétrie des décisions d'accumulation qui, à son tour, est justifiée par l'utilisation différenciée des biens (hypothèse (*ii*). Désignant par s_i la fraction épargnée de la plus-value du capitaliste i (i = 1, 2) et par r_i son taux de profit, on a, compte tenu de (*iv*) et (*v*) :

$$\begin{aligned} y_1 &= k_1(1+s_1r_1)+k_2(1+s_2r_2) \\ y_2 &= v_1(1+s_1r_1)+v_2(1+s_2r_2)+(1-s_1)r_1(k_1+v_1)+(1-s_2)r_2(k_2+v_2) \end{aligned} \tag{3}$$

Puisque l'on fait abstraction de la monnaie et des titres, la valeur de la demande globale de biens est égale à la valeur du produit total et, par conséquent, ces deux équations se déduisent l'une de l'autre. On raisonnera sur la première équation. Notons $G_i = (1+g_i)$ les facteurs d'accumulation. Compte tenu de (*v*), $g_i = s_ir_i$. La première équation du système (3), sous la forme $y_1 = k_1G_1 + k_2G_2$, s'écrit après simplification par la valeur des moyens de production comme une relation purement physique entre quantités de ces moyens de production qui représente leur égalité emplois-ressources :

$$q_1 = G_1q_1a_{11} + G_2q_2a_{21} \tag{4}$$

Cette relation entre les facteurs d'accumulation sectoriels peut être réécrite pour faire apparaître la proportion de Marx et des paramètres tous connus sur la base du système (**M**, z) :

---

[2] C'est seulement si le changement de λ était purement nominal au sens qu'il résulterait d'une modification des unités de mesure physique des biens, que l'ensemble des techniques se réduirait à une seule ayant autant d'expressions nominales que de choix d'unités physiques relatives.

[3] Oskar Lange (1965: 6) remarquait à cet égard : "It is possible to express quantities [k] et v + m in monetary units instead of physical units because this procedure does not affect at all the essence of balance-sheet laws studied by us". Cependant, il ne justifie guère cette thèse.

$$z = G_1 z a_{11} + G_2 \tag{5}$$

Dans cette première partie de l'article, nous supposons que les moyens de production sont toujours entièrement utilisés et donc que cette égalité est toujours vérifiée. À un moment donné, les facteurs d'accumulation sont les seules inconnues dans cette relation, ce qui illustre l'asymétrie des décisions des secteurs qui caractérise le modèle de Marx: un seul des deux taux d'accumulation peut être posé comme exogène. Mais en réalité l'équation (5) permet aussi de comprendre, au delà de cette asymétrie, pourquoi c'est le secteur I qui est choisi pour le rôle actif. Écrivons en effet la proportion de Marx future, indiquée par l'indice +, en fonction de son niveau actuel et des taux d'accumulation :

$$z^+ = z\frac{G_1}{G_2} \tag{6}$$

Cette définition donne une expression de G_2 linéaire en z ($G_2 = \frac{G_1}{z^+}z$). Sa substitution dans l'équation (5) permet d'éliminer non seulement G_2, mais aussi z pour obtenir une relation entre les seuls G_1 et z^+ :

$$z^+ = \frac{G_1}{1 - a_{11}G_1} \tag{7}$$

Ce résultat, étonnant car la proportion de Marx future ne dépend que de G_1 et pas de z, son niveau initial, est à l'origine de l'ajustement brutal à l'équilibre de Marx. Économiquement, il se comprend facilement. Considérons uniquement la première équation du système (1) : connaissant y_1 et G_1 on obtient y_1^+ et aussi $(y_1 - k_1^+)$, *i.e.* la valeur des moyens de production qui restent disponibles pour le secteur II, à savoir k_2^+ s'ils sont entièrement utilisés. D'où l'on tire aussi $y_1^+ / k_2^+ = z^+$, indépendamment de z. Comme $y_1^+ = y_1 G_1$ et $y_1 - k_1^+ = y_1(1 - a_{11}G_1)$, on retrouve bien (7). Avec G_1 exogène, tant que les moyens de production existant sont entièrement utilisés, la même proportion de Marx z^+ sera donc obtenue immédiatement, à partir de valeurs potentiellement très diverses de son niveau initial. Après quoi il suffit que la décision d'accumulation du secteur I soit maintenue constante au cours du temps ($G_1^+ = G_1$, etc.), pour que l'économie suive un sentier de croissance régulier ($z^{++} = z^+$, etc.). Pour au moins des plages entières de valeurs de $z(0)$, en fixant G_1 on obtient une croissance régulière avec $z(t) = G_1 / (1 - a_{11}G_1)$ pout tout $t > 0$. Si G_1 varie, on provoque en une seule période un nouveau taux de croissance équilibré.

Il faut remarquer que le résultat impliqué par (7), tant en ce qui concerne le caractère abrupt de l'ajustement que sa stabilité, tient à la nature des moyens de production. Supposons, à titre d'exercice, que l'on se donne le taux d'accumulation du secteur II, et non plus G_1, comme variable exogène. Raisonnons *a contrario* de ce que nous venons de faire et rayons mentalement l'équation du secteur I dans le système (1). Connaissant k_2 et G_2, on obtient k_2^+ (pour autant que cette quantité soit disponible), mais rien ne nous permettra de déterminer k_1^+ ou v_1^+ (et donc y_1^+ et z^+) tant que nous ne connaîtrons pas y_1, et donc z. Nous connaissons y_2

et v_2^+, mais $(y_2 - v_2^+)$ ne fixe qu'une borne supérieure pour v_1^+ parce que, contrairement au premier secteur, le secteur II produit des biens à double usage, destinés aussi à la consommation finale des capitalistes. Rétablissons en revanche l'équation du secteur I. La connaissance de y_1 (ou *z*) nous fournit directement $k_1^+ = y_1 - k_2^+$ et donc y_1^+ et z^+. De fait, l'élimination de G_1 – et non plus de G_2 – entre les équations (5) et (6) donne maintenant, pour G_2 constant, une équation de récurrence en *z* :

$$z^+ - \frac{z}{a_{11}G_2} = -\frac{1}{a_{11}}$$

Sa solution est $z(t) = \bar{z} + (1/a_{11}G_2)^t\,(z(0) - \bar{z})$, où $\bar{z} = G_2/(1 - a_{11}G_2)$. L'évolution est maintenant progressive et non plus brutale. En outre, on peut remarquer qu'elle est monotone instable sous l'hypothèse $G_2 < 1/a_{11}$, qui est la condition pour que la solution stationnaire $\bar{z}$ soit positive.

L'équation (4) lorsqu'elle est vérifiée, avec $G_1 \le R_1$ exogène et constant, est à elle seule suffisante pour obtenir la solution complète du modèle de Marx. C'est donc l'accumulation dans le secteur I qui est décisive. Le modèle de Marx formalise une économie, tirée par les décisions d'accumulation dans le secteur qui produit le bien dont l'accumulation est le seul usage.

Fournissons une autre démonstration, géométrique, à l'aide de la figure 1. Sur cette figure, la droite *MP* est le graphe de l'équation (5). Elle est paramétrée par la proportion initiale *z*. Représentons par le point *A* la décision d'accumulation du capitaliste du secteur I. Le capitaliste du secteur II s'adapte et son facteur d'accumulation est représenté au point *B*. Dans le cas illustré ci-dessus, en *E* on a $G_1 > G_2$, d'où $z^+ > z$ et la droite du moyen de production pivote autour du point *P* dans le sens des aiguilles d'une montre. On va montrer qu'à la période suivante cette droite coupe la bissectrice à la verticale du point *A*. Pour cela, définissons le point *F* sur la bissectrice à la verticale de *A*, et prolongeons le segment *PF* jusqu'à l'intersection avec l'axe des ordonnées au point *M'*. On a *OM'/OM = AF/AE*. Donc :

$$OM' = OM\,\frac{AF}{AE} = z\,\frac{G_1}{G_2} = z^+$$

où la dernière égalité résulte de (6). Par conséquent, *OM'* est bien l'ordonnée à l'origine z^+ de la droite du moyen de production à la période suivante. À cette période, les facteurs d'accumulation seront représentés par un point de la droite *M'P*. Il suffit alors que le capitaliste du secteur I maintienne son taux d'accumulation initial pour que l'économie soit en croissance régulière au point *F*, avec $G_1^+ = G_2^+ = G_1$. On voit immédiatement que la droite *MP* à la seconde période est déterminée uniquement par le point *A* (c'est-à-dire G_1), quelle que soit sa position initiale.

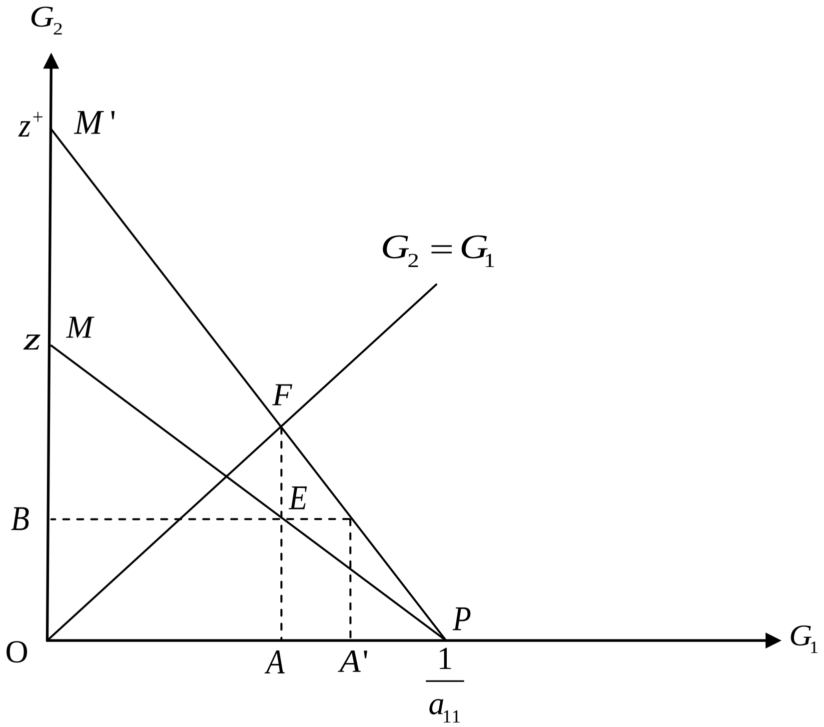

Figure 1

On vérifie également sur la figure 1 que le modèle avec G_2 exogène est instable. Supposons que le capitaliste du secteur II décide son facteur d'accumulation G_2 au point *B* et que son collègue du secteur I s'adapte. Le facteur d'accumulation dans le secteur I sera *A*. La nouvelle droite *M'P* du moyen de production sera la même que précédemment. Si le capitaliste du secteur II maintient son taux d'accumulation dans la période suivante, le facteur d'accumulation dans le secteur I sera *A*'. La droite *M'P* continuera à pivoter et l'écart entre les deux facteurs d'accumulation s'accentuera. La proportion ne se stabilisera jamais. Elle est croissante dans le cas envisagé et aurait été décroissante si on avait pris $G_2 > G_1$.

1.3. Rosa Luxemburg et Michio Morishima à propos des schémas de reproduction

Ces deux auteurs reconnaissent l'importance théorique du schéma de Marx. Rosa Luxemburg y voit « l'un des services les plus éminents que Marx ait rendus à la science économique » (1913, t. 1 : 25) et Michio Morishima considère que « it is no exaggeration to say that before Kalecki, Frisch and Tinbergen no economist, except Marx, had obtained a macro-dynamic model rigorously constructed in a scientific way […..]. Marx's theory of reproduction is very similar to Leontief's input-output analysis […..] and […..] contains in itself a way to von Neumann Revolution » (1973, p. 3). Cependant, ils estiment que l'analyse de Marx est contradictoire avec sa vision du capitalisme. Rosa Luxemburg (1913, t. 2 : 15) observe qu' « en examinant le schéma de reproduction élargie sous l'angle de la théorie de Marx, on arrive à cette conclusion qu'il se trouve en contradiction avec cette théorie [celle qui se trouve dans tout le *Capital* en particulier dans le livre III] sur plus d'un point ». Cette contradiction a son origine dans l'interprétation commune aux deux auteurs du modèle de Marx comme un modèle d'équilibre, où la croissance régulière en seconde période est une propriété du modèle, qui découle nécessairement de ses hypothèses. Une fois que ceci est admis, il s'agit d'identifier l'hypothèse dont dépend l'équilibre de Marx et de montrer son caractère arbitraire. Cela justifie son élimination et son remplacement par une hypothèse différente, compatible avec des modèles où cet équilibre n'est pas vérifié. Pour Rosa Luxemburg, l'équilibre de Marx résulte de l'hypothèse (*i*) de technique de production inchangée : « malgré l'accumulation du capital […le schéma…] présuppose la même composition organique [….]. Cette hypothèse est sans doute admise pour simplifier l'analyse […mais doit être abandonnée car…] les modifications techniques [sont] parallèles au procès d'accumulation capitaliste et inséparables d'elle » (*Ibid.*, t. 2 : 15). L'interprétation du modèle de Marx comme un modèle d'équilibre est encore plus explicite chez Morishima. L'équilibre de Marx résulte de l'hypothèse (*vi*) sur l'asymétrie des décisions d'accumulation : cet équilibre est une « strange conclusion » du modèle qui « is not specific to the numerical illustration used by Marx, but is a logical implication of his investment function » (1973, p. 120). D'où la conclusion que « in Marx's economy there prevails a tendency towards balanced growth, which is much stronger than the convergence claimed by neoclassical economists such as Solow, Meade and Uzawa, because *any state* of unbalanced growth will disappear in Marx's economy in a single year" (*Ibid*. souligné par nous). C'est cette fonction d'investissement que Morishima remet en cause dans la suite de son chapitre.

La suite de l'article montre l'erreur de ces interprétations et des critiques adressées à Marx. Tout se passe comme si ces auteurs acceptaient nos raisonnements en 1.2. mais oubliaient que l'ajustement peut nécessiter une contraction du secteur des biens de consommation, et surtout oubliaient la condition sur laquelle ils étaient fondés de pleine utilisation des moyens de production, à savoir l'hypothèse que l'équation (5) était toujours vérifiée. On étudiera les conditions sur la proportion initiale z pour que l'équilibre de Marx puisse se vérifier en ignorant d'abord tout problème de financement de l'accumulation. En d'autres termes, on se placera du point de vue d'un planificateur soumis à des contraintes purement physiques (section 2). L'analyse dégagera des proportions que nous disons physiques (bien que dans le système de Marx elles s'expriment par des nombres purs) en ce sens qu'elles ne dépendent pas des rapports sociaux (elles ne dépendent ni de λ ni des taux de profit r_i). Nous étudierons ensuite les restrictions supplémentaires liées à la théorie de la valeur utilisée par Marx (section 3).

2. Les conditions physiques de la reproduction

Comme on l'a rappelé dans l'introduction, Marx distingue la reproduction du capital individuel de celle du capital social. Dans le premier cas la condition de la reproduction est la formation d'une plus-value non négative. Tout en continuant à être nécessaire, cette condition n'est plus suffisante pour la reproduction du capital social qui implique la prise en compte explicite des interdépendances entre les secteurs productifs. Un problème nouveau surgit : quelles sont les conditions de la reproduction de « la matière » ou de la « valeur d'usage » des différentes composantes du capital social ? Remarquons que seules les hypothèses (*i*), (*ii*), (*iii*) et (*vi*) sont utiles pour l'analyse de la reproduction physique. En particulier, on ne supposera pas que les profits sont investis dans le secteur où ils se forment.

Deux types de crise peuvent apparaître. Il est possible que les moyens de production produits ne trouvent pas d'emploi. Quand il en est ainsi, la quantité de biens de consommation produits ne permet pas de fournir aux travailleurs les biens dont ils ont besoin. On parlera pour désigner une telle situation d'une crise de reproduction. On peut aussi imaginer des situations où trop peu de moyens de production ont été produits pour que le secteur II puisse remplacer les siens, compte tenu de la décision d'accumulation du secteur I. On parlera alors de crise d'ajustement. Les deux formes de crise sont d'une nature totalement différente. Alors que dans la crise d'ajustement la diminution de la production de biens de consommation permet à l'économie de s'ajuster au sentier de croissance équilibré, un tel ajustement est immédiatement exclu en cas de crise de reproduction qui exprime l'impossibilité d'adaptation du secteur II à la décision d'accumulation dans le secteur I. Dans ce cas, l'équilibre de Marx à la deuxième période n'existe pas.

2.1. Les conditions physiques de l'équilibre de Marx

Considérons le système de Marx en valeurs d'usage, indépendamment de toute relation sociale, avec une équation pour chacune d'entre elles :

$$\begin{cases} q_1 G_1 a_{11} + q_2 G_2 a_{21} = q_1 \\ q_1 G_1 a_{12} + q_2 G_2 a_{22} + C = q_2 \end{cases}$$

où C désigne la consommation finale globale des non travailleurs. En divisant la première ligne par $q_2 a_{21}$ et la seconde par q_2, on fait apparaître les grandeurs connues sur la base du système (**M**, z) ou (**M**, $\tilde{z}$) :

$$\begin{cases} z G_1 a_{11} + G_2 = z \\ \tilde{z} G_1 + G_2 a_{22} + c = 1 \end{cases} \qquad (8)$$

où $c = C / q_2$ est la part de la consommation finale dans la production de biens de consommation. Rappelons que $z = q/a_{21}$ et $\tilde{z} = v_1 / y_2 = q a_{12} = a_{12} a_{21} z$.

En éliminant G_2 entre ces deux équations, on met en évidence une relation entre G_1 et c :

$$c = Dz \; G_1 + \; 1 - a_{11} z \qquad (9)$$

où $D = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$ est le déterminant de la matrice **M** (et de la matrice **A** inconnue). Il est positif si la composition organique du capital est plus élevée dans le secteur I que dans le secteur II, i.e. si le secteur I utilise plus intensivement les moyens de production (et moins intensivement le travail) que le secteur II. La part de la consommation finale c est une fonction linéaire croissante ou décroissante de G_1 selon le signe de D. Comme les facteurs d'accumulation des secteurs sont en relation décroissante (cf. (5) ou (8)), si $D > 0$ (< 0) c'est en effet un développement relatif important (faible) du secteur I qui libérera le plus de biens de consommation pour une utilisation finale.

Pour que l'équilibre de Marx soit possible, il faut que la consommation finale ne soit pas négative, donc que la solution de l'équation (9) soit positive ou nulle :

$$c \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad D G_1 \geq a_{22} - \frac{1}{z} \qquad (10)$$

Si le déterminant est positif, la condition (10) se lit $G_1 \geq \frac{a_{22}}{D} - \frac{1}{zD}$. Elle détermine le taux d'accumulation minimum dans le secteur I, qui permet au système de se reproduire. En revanche, si le déterminant est négatif, la condition (10) se lit $G_1 \le \frac{a_{22}}{D} - \frac{1}{zD}$. Elle fixe alors le taux maximum de croissance admissible du secteur I. Pour que le système se reproduise, G_1 doit donc excéder une certaine valeur plancher si $D > 0$, et au contraire ne pas dépasser une valeur plafond si $D < 0$. Dans les deux cas, lorsque z augmente, l'ensemble des G_1 admissibles compatibles avec la reproduction se réduit progressivement selon le signe de D : le plafond baisse ou le plancher monte.

Pour que l'équilibre de Marx se réalise, il faut aussi qu'aucune crise de reproduction n'apparaisse en seconde période, donc que :

$$DG_1 \ge a_{22} - \frac{1}{z^+}$$

En utilisant l'équation (7), $z^+ = \frac{G_1}{1 - a_{11}G_1}$ pour éliminer z^+ de cette condition en seconde période, on a :

$$G_1^{-2} - \ a_{11} + a_{22} \ G_1^{-1} + D \ge 0 \tag{11}$$

Lorsque cette condition est vérifiée à l'égalité, on obtient l'équation caractéristique des matrices **M** et **A**. G_1 est alors l'inverse de la valeur propre dominante de cette matrice, inverse que l'on notera μ. On peut montrer que l'inégalité précédente implique que :

$$G_1 \le \mu \tag{12}$$

On a donc obtenu une seconde condition algébrique physique de l'équilibre de Marx, économiquement évidente puisqu'il n'y a pas de croissance régulière physiquement possible à un taux qui excède celui qui prévaut le long d'un sentier de von Neumann. Si la première condition $DG_1 \ge a_{22} - (1/z)$ n'est pas vérifiée, l'économie connaît une crise de reproduction dès la première période. Si au contraire cette première condition est satisfaite mais pas la seconde (si donc $G_1 > \mu$), on peut affirmer que, lorsque G_1 est maintenu constant, la crise de reproduction est évitée en première période mais survient nécessairement à la seconde. Si les conditions (10) et (12) sont toutes deux vérifiées la croissance régulière s'installera dès la seconde période. Ces deux conditions sont donc nécessaires et suffisantes pour que l'équilibre de Marx se réalise.

2.2. La crise de reproduction

On dit que le facteur de croissance G_1 est admissible s'il est compris entre 1 et l'inverse de la valeur propre dominante de la matrice des coefficients techniques : $1 \le G_1 \le \mu$. En effet, si la première inégalité n'était pas vérifiée, l'équilibre de Marx conduirait à la disparition asymptotique de l'économie, et la seconde est une condition nécessaire de cet équilibre en seconde période comme on vient de le voir.

La possibilité d'une surproduction des moyens de production est intuitive. Le secteur I peut être relativement trop important pour que les moyens de production qui ont été produits puissent être absorbés par le système, même si la croissance du secteur qui utilise le plus intensivement les moyens de production est maximale et si l'autre secteur renonce lui aussi à toute consommation finale. Inversement, pour un développement relatif suffisamment élevé du secteur des biens de consommation, il est intuitif que la crise de reproduction sera toujours évitée. On cherche ici à déterminer :

- la proportion critique au-delà de laquelle la crise de reproduction est inévitable, quel que soit G_1 admissible (nous la noterons z_α).
- la proportion critique en-deçà de laquelle la crise de reproduction est impossible, quel que soit G_1 admissible (nous la noterons z_β).

On proposera successivement une démonstration algébrique et une démonstration géométrique de ces deux proportions.

2.2.1. La solution algébrique

Puisque la crise de reproduction est une surabondance de moyens de production et une pénurie de biens de consommation se traduisant par une solution $c < 0$, les deux bornes z_α et z_β sont calculées à partir de l'équation (9) qui se déduit du système (8), en portant la valeur appropriée de G_1 et $c = 0$.

z_α est la proportion la plus élevée telle qu'il existe au moins un G_1 admissible qui assure la reproduction. Elle est obtenue en posant l'accumulation maximale dans le secteur qui utilise relativement le plus les moyens de production : à savoir le secteur I si $D > 0$ (on pose en ce cas $G_1 = \mu$) et le secteur II dans le cas inverse (on pose en ce cas $G_1 = 1$). L'équation (9) donne alors directement le résultat algébrique :

$$\mu Dz + 1 - a_{22}z = 0 \qquad \Rightarrow \qquad z_\alpha\big|_{D\geq 0} = \frac{1}{a_{22} - \mu D}$$

$$Dz + 1 - a_{22}z = 0 \qquad \Rightarrow \qquad z_\alpha\big|_{D\leq 0} = \frac{1}{a_{22} - D}$$

Inversement, z_β est la proportion la plus élevée telle que la reproduction soit assurée quel que soit G_1 admissible. Elle est obtenue en posant l'accumulation maximale admissible dans le secteur qui utilise le moins intensivement les moyens de production, à savoir le secteur II si $D \geq 0$ (on pose alors $G_1 = 1$) ou le secteur I si $D \leq 0$ (on pose alors $G_1 = \mu$). On déduit immédiatement que :

$$z_\beta\big|_{D\geq 0} = z_\alpha\big|_{D\leq 0} = \frac{1}{a_{22} - D} \tag{13}$$

$$z_\alpha\big|_{D\geq 0} = z_\beta\big|_{D\leq 0} = \frac{1}{a_{22} - \mu D} \tag{14}$$

Pour un signe du déterminant donné, on a $z_\beta < z_\alpha$ puisque μ >1. Pour $z_\beta < z < z_\alpha$, la crise n'est évitée que si le taux de croissance du secteur I respecte la condition (10). Rappelons que, quel que soit le signe du déterminant, l'ensemble des G_1 admissibles compatibles avec la reproduction se réduit progressivement lorsque z s'élève.

Afin de dégager le sens économique des proportions critiques z_α et z_β, éliminons d'abord D de (14) en utilisant l'équation caractéristique $\mu^{-2} - (a_{11} + a_{22})\mu^{-1} + D = 0$. On obtient :

$$z_\alpha\big|_{D\geq 0} = z_\beta\big|_{D\leq 0} = \frac{\mu}{1-\mu a_{11}} \tag{15}$$

$z_\alpha\big|_{D\geq 0},1$, ou $z_\beta\big|_{D\leq 0},1$, est donc le vecteur propre positif associé à la transposée de la matrice des coefficients techniques. Pour interpréter les conditions (14) ainsi réécrites, il suffit de remarquer que lorsque $c = 0$ et que l'un ou l'autre des facteurs de croissance vaut μ, alors le second vaut également μ car on est sur le sentier de croissance maximal de von Neumann. Rappelons que $z = q_1 / q_2 a_{21}$, en sorte que les proportions critiques données par (15) impliquent que $q_1 = q_1\mu a_{11} + q_2\mu a_{21}$. Les termes $q_1\mu a_{11}$ et $q_2\mu a_{21}$ représentent les absorptions de moyens de production respectivement par les secteurs I et II, sur ce sentier. Il s'agit de l'absorption maximale si $D \geq 0$, définissant alors la proportion critique z_α, et de l'absorption minimale si $D \leq 0$, ce qui donne alors z_β.

Pour comprendre la signification économique de (13), considérons le développement maximal admissible du secteur II, qui est obtenu lorsque le développement du secteur I est minimal. $G_2^{\max}$ est donc solution du système (8) avec $c = 0$ et $G_1 = 1$. Il vient :

$$G_2^{\max} = \frac{1-a_{11}}{a_{22} - D}$$

En éliminant D dans (13) grâce à cette définition de $G_2^{\max}$, on obtient :

$$z_\beta\big|_{D\geq 0} = z_\alpha\big|_{D\leq 0} = \frac{G_2^{\max}}{1-a_{11}} \tag{16}$$

L'interprétation des conditions (13) ainsi réécrites est tout à fait semblable à partir du moment où l'on a remarqué que pour ces dernières proportions on a $q_1 = q_1 a_{11} + q_2 a_{21} G_2^{\max}$: les termes $q_1 a_{11}$ et $q_2 a_{21} G_2^{\max}$ représentent respectivement les absorptions de moyens de production par les deux secteurs lorsque $G_1 = 1$ et $G_2 = G_2^{\max}$. Cette configuration définit l'une ou l'autre des proportions critiques selon le signe du déterminant.

2.2.2. La solution géométrique

Il est éclairant de fournir également une démonstration géométrique. Sur la figure 2, qui concerne le cas de déterminant positif, on a tracé en haut la droite $c(G_1)$ dont l'équation est donnée par (9). Elle est croissante puisque $D > 0$. Elle possède un point indépendant de *z*, le point $(G_1, c) = (\frac{a_{22}}{D}, 1)$, autour duquel elle pivote dans le sens inverse des aiguilles d'une montre lorsque *z* s'accroît. On a représenté deux droites $c(G_1)$, correspondant à deux valeurs différentes de *z*. L'une passe par l'abscisse 1 (premier cas, droite en trait plein) et l'autre par l'abscisse μ (second cas, droite en tirets). Toutes les valeurs de G_1 qui sont admissibles, entre 1 et μ, impliquent une consommation positive dans le premier cas alors qu'elles entraînent une crise de reproduction dans le second cas. De petites augmentations de *z* autour des valeurs qui soutiennent ces deux droites feront apparaître des possibilités de crise pour de faibles valeur de G_1 dans le premier cas, et feront disparaître la seule possibilité pour éviter la crise à savoir $G_1 = \mu$ et $c = 0$ dans le second cas. La proportion qui soutient la première droite est donc z_β (celle en deçà de laquelle la crise est évitée quel que soit G_1 admissible) tandis que c'est z_α (celle au delà de laquelle la crise est inévitable) qui soutient la seconde. Ces proportions sont déterminées géométriquement en exprimant les tangentes des angles α et β :

$$\frac{1}{a_{22}D^{-1} - \mu} = \frac{-\ 1 - a_{22}\, z_\alpha\big|_{D>0}}{\mu} \quad \Rightarrow \quad z_\alpha\big|_{D>0} = \frac{1}{a_{22} - \mu D}$$

$$\frac{1}{a_{22}D^{-1} - 1} = \frac{-\ 1 - a_{22} z_\beta\big|_{D>0}}{1} \quad \Rightarrow \quad z_\beta\big|_{D>0} = \frac{1}{a_{22} - D}$$

Sont ainsi redémontrées les expressions (15) et (16) avec $D > 0$.

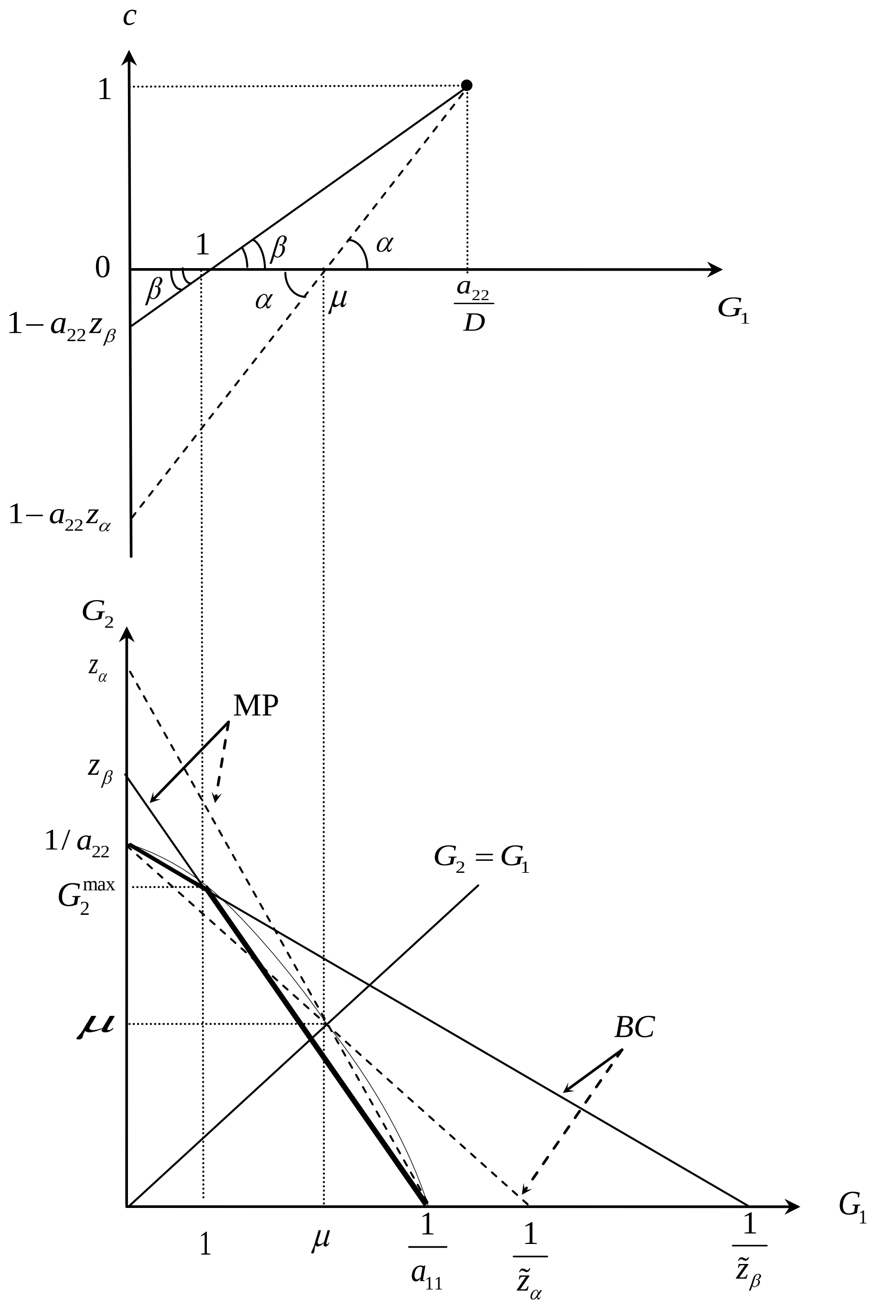

Figure 2 : Le cas où le déterminant *D* est positif

Le graphique du bas de la figure 2 permet de mieux visualiser le sentier de von Neumann dans le plan (G_1, G_2). Y figurent des droites « *MP* » et « *BC* » dont les équations sont fournies par le système (8) lorsque la consommation finale est nulle, à savoir $zG_1a_{11} + G_2 = z$ (*MP*) et $\tilde{z}G_1 + G_2a_{22} = 1$ ou encore $(a_{12}a_{21})zG_1 + G_2a_{22} = 1$ (*BC*). Ces droites ont un point fixe sur les axes lorsque z et $\tilde{z}$ varient, et lorsqu'ils augmentent elles pivotent dans le sens des aiguilles d'une montre pour *MP*, dans le sens inverse pour *BC*. Leur point d'intersection décrit alors une branche d'hyperbole qui passe par le pivot des droites et dont l'expression algébrique résulte de l'élimination de z entre les équations de *MP* et *BC :*

$$G_2 = \frac{1 - a_{11}G_1}{a_{22} - DG_1} \tag{17}$$

Remarquons que $G_2^{\max}$, obtenu par définition pour $c = 0$ et $G_1 = 1$, appartient à cette hyperbole. Pour une valeur de z fixée, la situation est viable lorsque la droite *BC* domine *MP* car les taux d'accumulation des deux secteurs laissent, en ce cas, un excédent de biens de consommation finale. En revanche, lorsque la droite *BC* est dominée par *MP*, alors les taux d'accumulation ne sont pas réalisables parce que la quantité de biens de consommation qu'ils requièrent pour la consommation intermédiaire excède la dotation existante. Si l'on préfère utiliser un vocabulaire plus familier, même s'il est étranger à l'étude purement physique ici menée, on dira que dans cette situation il existe un excès de demande de biens de consommation et un excès d'offre de moyens de production. Pour la proportion donnée z_β sur la figure 2, la frontière des taux d'accumulation physiquement admissibles est représentée par une ligne brisée grasse. Du fait de la spécialisation des biens, la situation est différente selon le segment de la frontière sur lequel on se situe. Si le segment est formé par la droite MP, le système fonctionne normalement. Si, par contre, on se situe sur la droite BC l'économie connaît une crise de reproduction.

Le couple de droites *BC* et *MP*, en tirets, a un point d'intersection de coordonnées (μ, μ) correspondant au sentier de von Neumann. Il est facile de voir que la proportion soutenant le sentier de von Neumann est la proportion z_α au delà de laquelle la crise est inévitable : avec elle, $G_1 = \mu$ est la seule possibilité pour éviter la crise, possibilité qui disparaîtra dès que z et $\tilde{z}$ augmenteront, si peu que ce soit (le point d'intersection des droites *BC* et *MP* se déplaçant alors sur l'hyperbole vers le bas et la droite). Le couple de droites *BC* et *MP*, en traits pleins, a un point d'intersection de coordonnées $(1, G_2^{\max})$. Tout G_1 admissible, entre 1 et μ, est compatible avec la reproduction. Il suffit de perturber légèrement cette proportion pour voir que toute augmentation fera apparaître des possibilités de crise, contrairement à ce qui se passe en cas de diminution. Nous avons donc affaire à la proportion z_β, ou $\tilde{z}_\beta$, en deçà de laquelle la crise est évitée quel que soit G_1 admissible.

La détermination géométrique des proportions critiques est immédiate en raisonnant sur les triangles semblables délimités par les axes, une droite *MP*[4] et la verticale à 1 ou à μ selon le cas :

$$\frac{z_\alpha\big|_{D>0}}{a_{11}^{-1}} = \frac{\mu}{a_{11}^{-1} - \mu} \qquad \Rightarrow \qquad z_\alpha\big|_{D>0} = \frac{\mu}{1 - \mu a_{11}}$$

$$\frac{z_\beta\big|_{D>0}}{a_{11}^{-1}} = \frac{G_2^{\max}}{a_{11}^{-1} - 1} \qquad \Rightarrow \qquad z_\beta\big|_{D>0} = \frac{G_2^{\max}}{1 - a_{11}}$$

Sont ainsi redémontrées les expressions (15) et (16) dans le cas $D > 0$.

[4] On aurait pu également raisonner sur une droite *BC* plutôt que sur *MP*.

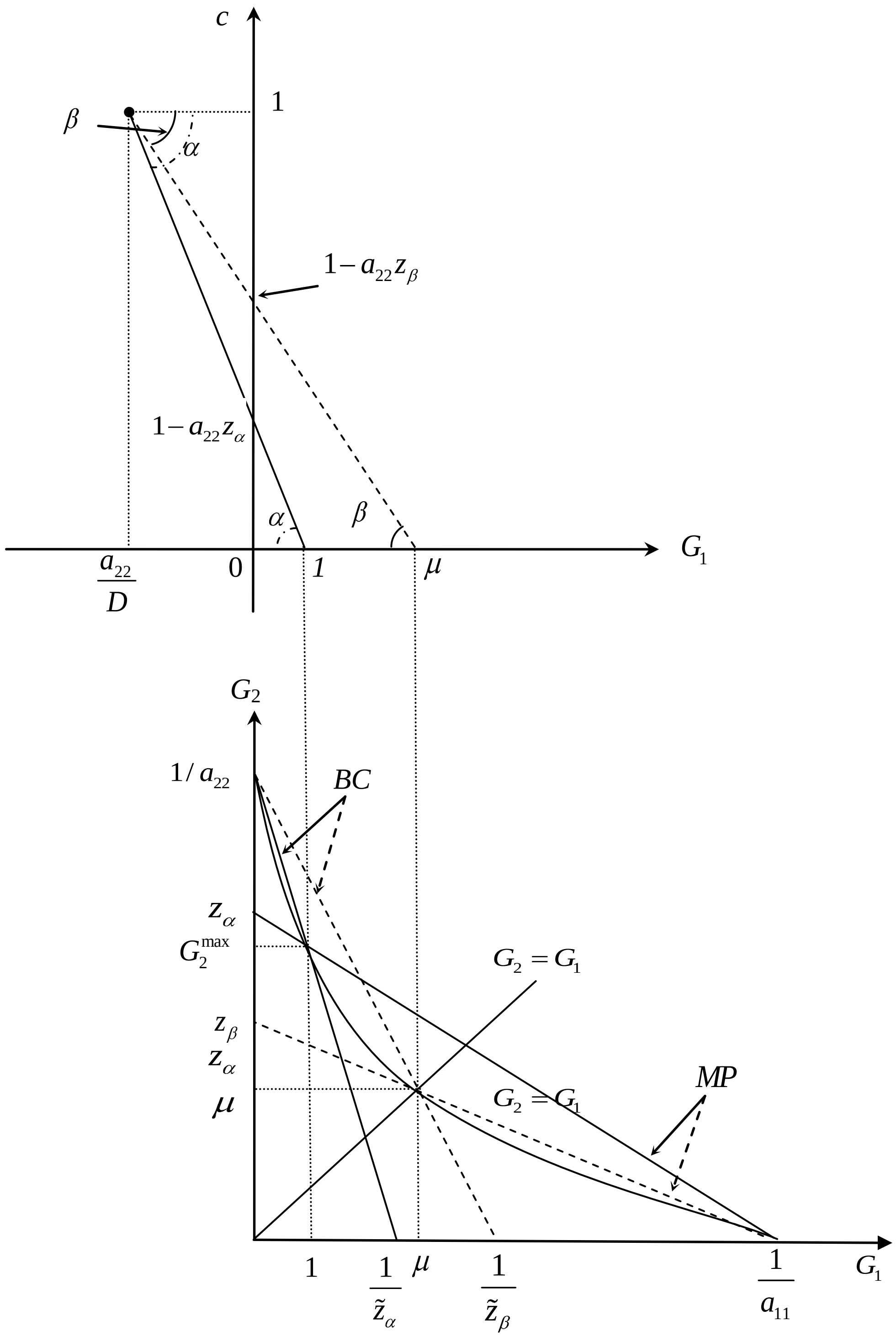

Figure 3 : Le cas où le déterminant *D* est négatif

La géométrie du cas de déterminant négatif a été représentée sur la figure 3. Les droites $c(G_1)$ sont maintenant décroissantes, pour des raisons semblables mais inverses à celles qui expliquaient leur croissance avec $D > 0$, et voient aussi leurs sens de rotation inversés. La branche d'hyperbole est maintenant convexe. Les mêmes arguments, adaptés à cette nouvelle configuration, permettent de redémontrer les expressions (15) et (16) dans le cas de $D<0$.

2.3. La crise d'ajustement

On a défini une crise d'ajustement comme une situation où le secteur II est dans l'impossibilité physique de remplacer ses moyens de production. En d'autres termes, la décision d'accumulation du secteur I ne laisse disponible qu'une quantité de moyens de production inférieure à celle qui a été utilisée dans le secteur II, déterminant par conséquent sa contraction. Il en est ainsi quand $z<\dfrac{1}{1-G_1a_{11}}$ ou encore, puisque $z=q_1/q_2a_{21}$, lorsque $q_1 \ 1-a_{11}G_1 \ <q_2a_{21}$, expression qui est la plus faible pour la valeur minimale admissible de G_1, soit 1, et la plus forte pour sa valeur maximale admissible, soit μ. Indépendamment du signe du déterminant, on a donc immédiatement $z_\delta=\dfrac{1}{1-\mu a_{11}}$ et $z_\gamma=\dfrac{1}{1-a_{11}}$, où z_δ et z_γ sont respectivement les proportions au-delà de laquelle la crise d'ajustement est évitée quel que soit G_1 admissible et en-deçà de laquelle elle est inévitable.

On détermine aussi géométriquement les proportions critiques sur la figure 4 :

$$\frac{z_\delta}{a_{11}^{-1}}=\frac{1}{a_{11}^{-1}-\mu} \quad \Rightarrow \quad z_\delta=\frac{1}{1-\mu a_{11}}$$

$$\frac{z_\gamma}{a_{11}^{-1}}=\frac{1}{a_{11}^{-1}-1} \quad \Rightarrow \quad z_\gamma=\frac{1}{1-a_{11}}$$

Puisque $\mu\geq 1$, $z_\delta\leq z_\gamma$. La crise d'ajustement est inévitable pour tout $z<z_\gamma$ (car même pour $G_1=1$, les moyens de production disponibles sont insuffisants pour assurer la reproduction simple du secteur II). Elle est évitée quel que soit G_1 admissible pour tout $z\geq z_\delta$ (car même pour $G_1=\mu$, les moyens de production disponibles sont suffisants pour assurer au moins la reproduction simple du secteur II). Pour z compris entre z_δ et z_γ, une crise d'ajustement aura lieu si $G_1>\dfrac{z-1}{a_{11}z}$. Si $D<0$, on a $z_\gamma<z_\delta<z_\beta<z_\alpha$. Si $D>0$, il en va de même à ceci près que selon les valeurs des coefficients, z_δ peut être plus grand ou plus petit que z_β (plus précisément on a $z_\delta<z_\beta$ si $D>a_{22}+\mu a_{11}-1$, et $z_\beta<z_\delta$ dans le cas contraire).

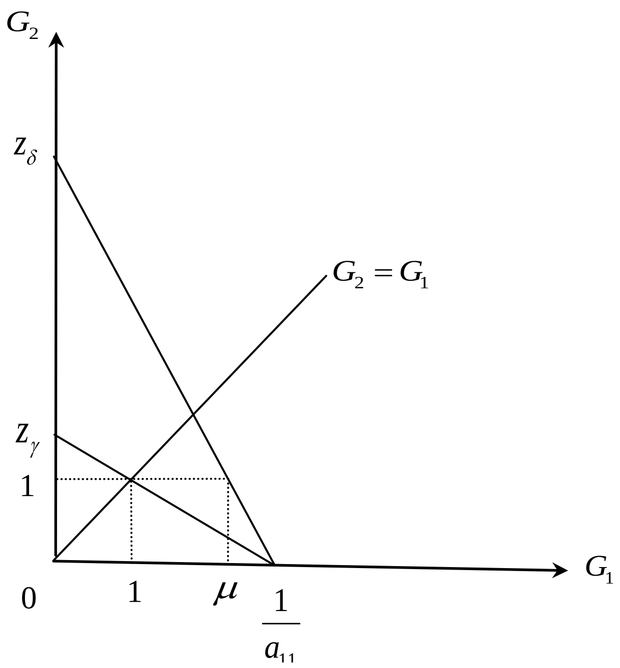

Figure 4 : Les crises d'ajustement

Soulignons que toutes les proportions critiques physiques ne dépendent que de l'équation caractéristique de la matrice des coefficients de production, équation accessible sur la base des données de la circulation monétaire que se donne Marx. C'est dire qu'à chaque équation caractéristique d'une matrice productive correspond un ensemble unique de 4 proportions critiques qui définissent les bornes de la reproduction physique du capital.

La conclusion générale de notre analyse de la reproduction en termes physiques est alors la suivante : les conditions physiques de la reproduction et des deux formes de crises sont complètement déterminées à partir uniquement de la matrice **M** déduite de l'observation des flux monétaires (ou en valeur). Par cette propriété remarquable, le modèle de reproduction de Marx se distingue radicalement des modèles correspondants d'inspiration classique.

3. Le modèle en valeur

Dans le modèle de Marx, les taux de profit sont donnés et l'accumulation dans chaque secteur est financée par sa propre plus-value. Il reste à savoir si ces conditions sociales imposent – ou non - des conditions supplémentaires à l'étude physique menée à la section précédente. Un exemple évident est le sentier de croissance maximal de von Neumann, toujours possible physiquement : il impose un rapport d'échange égal au prix de production, ce qui n'est compatible avec le schéma de Marx qu'en cas d'égale composition organique des deux secteurs ($D = 0$).

L'élimination de λ entre les équations de valeur

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{12} / \lambda \ \ \bar{R}_1 &= 1 \\ a_{21}\lambda + a_{22} \ \ \bar{R}_2 &= 1 \end{aligned} \tag{18}$$

permet de déterminer une relation entre les facteurs de profit $\bar{R}_i$, i = 1, 2 :

$$\bar{R}_2 = \frac{1 - a_{11}\bar{R}_1}{a_{22} - D\bar{R}_1}$$

Les deux facteurs de profit, connus dans le modèle de Marx, appartiennent donc à la même relation (17) qui lie les facteurs de croissance lorsque la consommation finale est nulle. Ils sont visualisables par un point situé sur la branche d'hyperbole décroissante et passant par le point (μ, μ), sur les figures 2 et 3. Marx choisit toujours, dans ses exemples, une composition organique du secteur I supérieure ou égale à celle du secteur II. Cela implique que le déterminant de **M** est positif ou nul, le secteur I n'utilisant relativement pas moins intensément les moyens de production que le secteur II. Comme Marx suppose l'uniformité (et la positivité) du taux d'exploitation, cela implique aussi l'inégalité suivante :

$$1 \leq \bar{R}_1 \leq \mu \leq \bar{R}_2 \tag{19}$$

L'introduction des contraintes de budget se traduit chez Marx par une contrainte sociale d'autofinancement de l'accumulation des secteurs. Leurs taux de croissance sont limités par leurs taux de profit, lesquels sont fixes puisque la valeur relative est fixe : $G_1 \leq \bar{R}_1$ et $G_2 \leq \bar{R}_2$.

3.1. Les proportions critiques

Les proportions critiques sont modifiées en conséquence. Nous les noterons z_i^r lorsque les taux d'accumulation sont limités par les taux de profit, par opposition aux proportions critiques du modèle purement physique, exempt de ces contraintes, notées z_i comme dans la section 2 $(i = \alpha, \beta, \delta, \gamma)$. Algébriquement, les proportions critiques z_i^r sont obtenues en remplaçant dans les expressions correspondantes du modèle physique, d'une part $G_2^{\max}$ par $\bar{R}_2$, d'autre part μ par $\bar{R}_1$ ou $\bar{R}_2$ selon qu'il est multiplié par un coefficient a_{1i} ou par un coefficient a_{2i}.

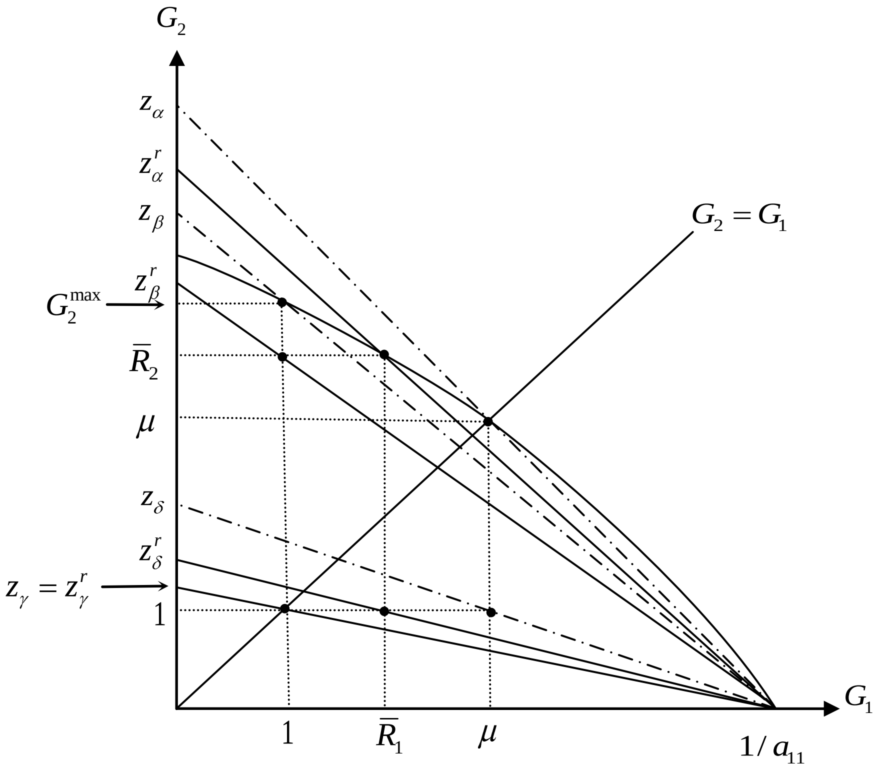

Figure 5 : Les proportions critiques de Marx

La figure 5 détermine ces proportions. La branche d'hyperbole qui relie les facteurs de profit est concave puisque $D>0$. On a renoncé à représenter les droites *BC* pour rester lisibles (par contre, on a conservé en tirets les droites « *MP* » des figures 2 et 4 afin de visualiser les modifications introduites). Les proportions critiques dans le modèle en valeur sont obtenues en faisant varier G_1 entre 1 et $\bar{R}_1$ (et non plus entre 1 et μ) et G_2 entre 1 et $\bar{R}_2$ (et non plus entre 1 et $G_2^{\max}$). Par exemple, on obtient géométriquement

$$\frac{z_\alpha^r}{1/a_{11}} = \frac{\bar{R}_2}{(1/a_{11}) - \bar{R}_1} \Rightarrow z_\alpha^r = \frac{\bar{R}_2}{1 - a_{11}\bar{R}_1} .$$

Il est immédiatement apparent que, avec $D \geq 0$ et donc $1 \leq \bar{R}_1 \leq \mu \leq \bar{R}_2$, on a :

$$z_\alpha^r \leq z_\alpha \qquad z_\beta^r < z_\beta \qquad z_\delta^r \leq z_\delta \qquad z_\gamma^r = z_\gamma$$

Le tableau suivant récapitule les proportions critiques :

z	$z_\alpha = \dfrac{\mu}{1 - a_{11}\mu}$	$z_\beta = \dfrac{G_2^{\max}}{1 - a_{11}}$	$z_\delta = \dfrac{1}{1 - a_{11}\mu}$	$z_\gamma = \dfrac{1}{1 - a_{11}}$
z^r	$z_\alpha^r = \dfrac{\bar{R}_2}{1 - a_{11}\bar{R}_1}$	$z_\beta^r = \dfrac{\bar{R}_2}{1 - a_{11}}$	$z_\delta^r = \dfrac{1}{1 - a_{11}\bar{R}_1}$	$z_\gamma^r = \dfrac{1}{1 - a_{11}}$

Tableau 1

Précisons et commentons ces résultats pour le cas $D>0$ illustré par la figure 5.

a) La crise de reproduction

Elle est évitée si et seulement si $z \le \dfrac{\bar{R}_2}{1-a_{11}G_1}$ (ou encore $G_1 \ge \dfrac{z-\bar{R}_2}{za_{11}}$). En effet, rappelons que $z = y_1 / k_2$. Compte tenu de la passivité du secteur II, la valeur des moyens de production que le secteur I a produit et ne désire pas accumuler, $y_1 \;\; 1-a_{11}G_1$, ne doit pas excéder la valeur de la demande *maximale* de moyens de production du secteur II, soit $k_2\bar{R}_2$. Si cette crise est évitée en première période, elle l'est aussi par la suite car l'ajustement de z^+, donné par l'équation (7), permet de réécrire cette condition d'absence de crise de reproduction en seconde période sous la forme $G_1 \le \bar{R}_2$, qui est toujours vérifiée en vertu de (19) : il n'y a évidemment pas de croissance régulière concevable à un taux qui excède les capacités de financement du secteur II, ce qui est automatiquement évité dans le modèle de Marx avec $D \ge 0$, puisque $G_1 \le \bar{R}_1 \le \bar{R}_2$.

- Pour $z^r_\alpha < z \le z_\alpha$, la crise est inévitable dans le modèle de Marx, alors même qu'existent des facteurs G_1 qui permettraient de l'éviter dans le modèle physique. Ces facteurs en effet excèdent $\bar{R}_1$, en sorte que le secteur I se trouve incapable de les réaliser.
- Pour $z^r_\beta < z \le z^r_\alpha$, le taux d'accumulation du secteur I doit être assez élevé pour que son offre puisse être achetée par le secteur II, selon la condition $G_1 \ge (z-\bar{R}_2)/za_{11}$ que nous venons d'indiquer.
- Pour $z \le z^r_\beta$, la proportion de moyens de production est si faible que le secteur II pourra financer l'offre du secteur I, même si $G_1 = 1$.

b) La crise d'ajustement

Comme dans le modèle physique, elle est évitée si et seulement si $z \ge \dfrac{1}{1-G_1a_{11}}$, ce qui détermine un plafond pour G_1 ($G_1 \le (z-1)/za_{11}$). La proportion z^r_δ, au delà de laquelle la crise est impossible dans le modèle de Marx, est moins contraignante que z_δ, parce que sont exclues toutes les valeurs de G_1 comprises entre $\bar{R}_1$ et μ qui auraient été susceptibles de provoquer la contraction du secteur II. La proportion z_γ en deçà de laquelle la crise d'ajustement est inévitable reste inchangée lorsque les taux de profit fournissent les bornes de l'accumulation, car elle ne dépend pas de ces taux de profit.

3.2. Les exemples numériques de Marx

Marx fournit deux exemples. Dans le premier (1885, t. 2 p. 846), on a :

$$\begin{array}{ll}
\text{I} & \underset{k_1}{4000} + \underset{v_1}{1000} + \underset{m_1}{1000} = \underset{y_1}{6000} \\
\text{II} & \underset{k_2}{1500} + \underset{v_2}{750} + \underset{m_2}{750} = \underset{y_2}{3000}
\end{array}$$

Avec nos notations il vient :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} k_1/y_1 & v_1/y_1 \\ k_2/y_2 & v_2/y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/6 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \qquad D = 1/12 \qquad \mu = 1,228$$

$$z = y_1/k_2 = 4 \qquad \tilde{z} = v_1/y_2 = 1/3$$

$$\bar{R}_1 = 6/5 \qquad \bar{R}_2 = 4/3$$

$$G_2^{\max} = \frac{1-a_{11}}{a_{22}-D} = 2$$

Dans le second exemple (1885, t. 2 p. 850) on a, en éliminant les arrondis de Marx :

$$\begin{array}{ll} \text{I} & \underset{k_1}{5000} + \underset{v_1}{1000} + \underset{m_1}{1000} = \underset{y_1}{7000} \\ \text{II} & \underset{k_2}{10000/7} + \underset{v_2}{2000/7} + \underset{m_2}{2000/7} = \underset{y_2}{2000} \end{array}$$

Avec nos notations il vient :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 5/7 & 1/7 \\ 5/7 & 1/7 \end{pmatrix} \quad D = 0 \quad \mu = 7/6 = \bar{R}_1 = \bar{R}_2$$

$$z = 4,9 \qquad \tilde{z} = 0,5 \qquad G_2^{\max} = 2$$

Dans les deux cas, Marx choisit un taux d'épargne de 0,5 dans le secteur I. On a donc $G_1 = 1 + \dfrac{0,5m_1}{k_1+v_1}$, soit $G_1 = 1,1$ dans le premier exemple et $G_1 = 13/12$ dans le second.

Les proportions critiques sont résumées dans le tableau suivant :

	Crise de reproduction				Crise d'ajustement			
	z_α	z_α^r	z_β	z_β^r	z_δ	z_δ^r	z_γ	z_γ^r
1er ex.	6,772	6,666	6	4	5,514	5	3	3
2ème ex.	7	7	7	4,0833	6	6	3,5	3,5

Le premier exemple est très particulier parce que $z = z_\beta^r$, ce qui exclut toute crise de reproduction quel que soit le taux d'accumulation admissible dans le secteur I. Mais, comme z est compris entre z_γ^r et z_δ^r une crise d'ajustement est possible. Cependant le facteur d'accumulation choisi par Marx (G_1=1,1) est inférieur au facteur d'accumulation maximum $\left(G_1 = \dfrac{z-1}{za_{11}} = 9/8 \right)$ qui exclut l'occurrence d'une crise d'ajustement.

Dans le second exemple, la composition organique du capital est la même dans les deux secteurs. Graphiquement, dans ce cas la branche d'hyperbole se transforme en une droite. La valeur relative des biens est égale à leur prix de production et le facteur de profit est égal à μ. Les proportions critiques sont celles du système physique sauf pour z_β, qui est plus élevé que z_β^r car $G_2^{\max} > \mu$. Cependant la proportion initiale de Marx est telle qu'une crise de reproduction et une crise d'ajustement sont possibles. On a en effet :

$$z_\gamma^r < z_\beta^r < z < z_\delta^r < z_\alpha^r$$

Le facteur d'accumulation G_1 choisi par Marx permet d'éviter une crise de reproduction : il est supérieur à celui qui permet d'absorber la production du secteur I quand tous les profits du secteur II sont épargnés :

$$G_1 = \frac{13}{12} > \frac{z-\bar{R}}{za_{11}} = \frac{16}{15}$$

Ce choix de G_1 permet aussi d'éviter une crise d'ajustement car il est plus faible que le facteur d'accumulation qui permettrait tout juste au secteur II de remplacer ses moyens de production :

$$G_1 = \frac{13}{12} < \frac{z-1}{za_{11}} = \frac{39}{35}$$

3.3. Comparaison avec l'analyse post-sraffienne du modèle de Marx

L'approche post-sraffienne suppose connues la matrice **A** et les quantités produites q_i (i = 1,2). Le point de départ est le système physique, ce qui conduit à privilégier l'équation (4). Il suffit alors de substituer à la variable z le rapport q/a_{21}, où les deux termes sont connus, pour retrouver les résultats algébriques et géométriques obtenus en 1.2 et dans la section 2. La seule différence est que les proportions critiques sont maintenant exprimées dans les unités physiques retenues et non par des nombres, par q au lieu de z. Pour l'étude de la reproduction en valeur, le plus simple est de poser $\lambda = 1$ dans le système (18) et calculer les proportions critiques q^r qui sont comparées avec les proportions q correspondantes. Les résultats sont ceux de notre section 3, dont ils ne diffèrent que par les chiffres extraits des exemples numériques de Marx. La méthode « macroéconomique » suggérée par les schémas de Marx se révèle ainsi particulièrement puissante car, malgré l'hypothèse supplémentaire sur les méthodes de production et les quantités produites, sur tous les points traités dans l'article l'approche post-sraffienne n'apporte aucun élément nouveau.

Cette dernière est cependant utile car elle permet de répondre à une question intéressante qui n'a pas pu être traitée en utilisant uniquement les données du schéma des flux monétaires. Il s'agit de savoir dans quelle mesure le rapport d'échange entre les deux biens, noté $p = p_1/p_2$, peut empêcher la réalisation de l'équilibre de Marx dans une économie qui vérifie les conditions physiques de la reproduction. Dans chaque situation où le choix de G_1 permet d'éviter une crise de reproduction, un transfert de marchandises est nécessaire entre les secteurs. La valeur, $q_1(1-G_1a_{11})p$, des biens de production que la section I livre à l'autre section doit être au moins égale à la valeur de la quantité de biens de consommation qui lui permettra de mettre en œuvre sa décision d'accumulation, $q_1a_{12}G_1$, en sorte que :

$$a_{12}G_1 \leq 1-a_{11}G_1 \quad p$$

De même, la valeur des biens de production que le secteur II achète ne doit pas excéder la valeur des biens de consommation qu'il a produits déduction faite des biens de consommation qu'il accumule pour nourrir les travailleurs qu'il emploie :

$$a_{21}G_2 p \leq 1 - a_{22}G_2$$

Le déroulement normal de la reproduction exige donc que :

$$\frac{a_{12}G_1}{1-a_{11}G_1} \leq p \leq \frac{1-a_{22}G_2}{a_{21}G_2} \tag{20}$$

Puisque la quantité de moyens de production qui a été produite est égale à la demande, $q_1 = q_1 a_{11} G_1 + q_2 a_{21} G_2$, la condition (20) se réécrit :

$$\frac{a_{12}G_1}{1-a_{11}G_1} \leq p \leq \frac{1}{(1-a_{11}G_1)q} - \frac{a_{22}}{a_{21}}$$

Le taux d'accumulation dans le secteur des moyens de production et la condition initiale sur la proportion q déterminent les limites entre lesquelles doit se fixer le prix relatif en première période. En développant cette expression, on peut vérifier que l'intervalle n'est pas vide pourvu que $a_{22} - \dfrac{a_{21}}{q} \leq DG_1$, ce qui est la condition d'absence de crise de reproduction (voir la relation (10))

Cependant, en l'absence de crise, à partir de la deuxième période le taux de croissance du secteur II sera égal à G_1. On doit donc écrire pour la période 2 et les périodes ultérieures, la relation (20) sous la forme :

$$\frac{a_{12}G_1}{1-a_{11}G_1} \leq p^+ \leq \frac{1-a_{22}G_1}{a_{21}G_1}$$

À nouveau, en vertu de la condition (12) on peut vérifier que la fourchette, qui ne dépend plus que de G_1, n'est pas vide. Dans le cas où $G_1 = \mu$, la fourchette se réduit à un point et le prix relatif doit être égal au prix de production.

Ainsi, sur le sentier régulier, les conditions physiques de la reproduction imposent au rapport d'échange un intervalle qui ne dépend que de la technique et du choix du taux de croissance régulière. Tout mécanisme social qui déterminerait un prix relatif extérieur à ces fourchettes impliquerait l'impossibilité de choisir un taux de croissance pourtant physiquement réalisable. Remarquons que dans le modèle de Marx où les taux d'accumulation sont bornés par les taux de profit, cette condition est automatiquement vérifiée puisque l'on peut écrire :

$$\frac{a_{12}G_1}{1-a_{11}G_1} \leq \frac{a_{12}\bar{R}_1}{1-a_{11}\bar{R}_1} = \lambda = \frac{1-a_{22}\bar{R}_2}{a_{21}\bar{R}_2} \leq \frac{1-a_{22}G_2}{a_{21}G_2}$$

CONCLUSION

Même si nous nous sommes limités à l'étude de la possibilité des crises, notre analyse est suffisante pour conclure que les critiques de Rosa Luxemburg et Morishima au schéma de reproduction élargie de Marx ne sont pas justifiées. Il n'est pas exact d'affirmer que l'équilibre de Marx résulte de l'hypothèse d'une technique constante, ni que cet équilibre est logiquement impliqué par la fonction d'investissement. Marx obtient l'équilibre à la deuxième période sur la base d'exemples numériques particuliers qui excluent toute crise. Nous avons montré que, dans le schéma de reproduction élargie du livre II du *Capital*, il n'y a pas d'incompatibilité entre les hypothèses de Marx et la crise. L'équilibre de Marx dépend de la proportion initiale entre les secteurs et, pour certaines proportions, de la décision d'accumulation des capitalistes du secteur I. Il s'ensuit que, contrairement à l'interprétation des deux auteurs, le schéma de Marx n'est pas un modèle d'équilibre.

Notre analyse a confirmé l'intuition de Marx sur l'importance de la reproduction « de la matière ». Nous avons montré que les propriétés de son modèle dérivent fondamentalement de sa spécification physique : une économie bisectorielle où un des deux biens a un usage unique, l'accumulation. En outre, et cela est remarquable, même si Marx part exclusivement de données de la circulation monétaire qui ne lui permettent de calculer ni les quantités relatives de biens produits et utilisés par les secteurs, ni leur valeur relative, son schéma fournit tous les éléments d'une étude des conditions physiques de la reproduction. Dans cette économie, les crises peuvent se manifester sous deux formes distinctes. La crise d'ajustement est une contraction temporaire du secteur II, qui lui permet d'atteindre à la période suivante le taux de croissance fixé par le secteur I. La crise de reproduction est la crise proprement dite car l'excès d'offre de moyens de production à la période initiale empêche la croissance régulière à la période suivante. Le modèle de la reproduction physique détermine les proportions initiales de Marx compatibles avec la croissance équilibrée. En valeur, les conditions qui permettent d'éviter la crise de reproduction sont plus restrictives. Il reste à analyser le déroulement de cette dernière et sa résolution, ce qui fera l'objet d'une étude ultérieure.

Références bibliographiques

KURZ Heinz & Neri SALVADORI (2004), "'Man from the Moon'. On Sraffa's Objectivism", *Économies et Sociétés,* Histoire de la pensée économique, série PE, n° 35 : 1545-1557.

MARX, Karl (1867), *Le capital*, livre 1, traduction française in Karl Marx, Œuvres, Paris : Bibliothèque de la Pléiade, t. 1, 1963.

MARX, Karl (1885), *Le Capital*, livre 2, traduction française, in Karl Marx, Œuvres, Paris : Bibliothèque de la Pléiade, t. 2, 1968.

LANGE, Oskar (1965), *Teoria repeodukcji i akumulacji,* Warsaw : Polish Scientific Publishers, traduction anglaise, Oxford : Pergamon Press Ltd, 1969.

LUXEMBURG, Rosa (1913), *L'accumulation du capital*, traduction française, Paris, François Maspero, 1967.

MORISHIMA, Michio (1973), *Marx's Economics, A dual theory of value and growth,* Cambridge, Cambridge University Press.

SRAFFA, Piero (1960), *Production of Commodities by Means of Commodities,* traduction française Serge Latouche, Paris: Dunod, 1970.

TRIGG, Andrew (2006), *Marxian Reproduction Schema*, London, Routledge.

VON NEUMANN, John (1938), "Über ein Ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes" in *Ergebnisse eines mathematischen Seminars*, édité par K. Menger, Vienne. Traduction anglaise in *The Review of Economic Studies*, Vol. 13, N° 1 (1945 - 1946): 1-9.